کد فرم : FR/FY/۱۱ (فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

ویرایش : صفر دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/ ~~دوم~~) **۹۵-۱۳۹۴** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۴/۱۰/۱۹** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- انتگرال دوگانه $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2} \frac{x^3 e^y}{4-y}\,dydx$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- مساحت ناحیه محدود به سهمی‌های $y=x^2$ ، $y=2x^2$ ، $x=y^2$ و $x=3y^2$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- حجم ناحیه محدود به رویه $\frac{x}{a}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ و صفحه $x=a$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از رویه $z=xy$ را بیابید که درون استوانه $x^2+y^2=1$ واقع است. **۱۵ نمره**

سوال۵- V ناحیه محدود به رویه بسته $x^2+y^2+z^2=2ay$ است. ($a>0$)

انتگرال $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- C مسیر بسته $4x^2+25y^2=100$ است که در جهت عکس عقربه های ساعت پیموده می‌شود.

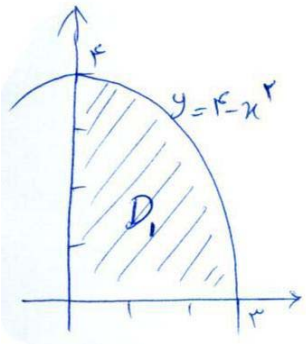
انتگرال منحنی الخط $\int_C \frac{x^2 y}{x^2+1}dx-(\tan^{-1}x)dy$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- S سطح خارجی رویه $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $z\geq 0$ و $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر S است. اگر

$$\vec{F}=(z-y\cos^3 z)\vec{i}+(xe^z)\vec{j}+(x+y)^3 e^{z^2}\vec{k}$$

مقدار انتگرال $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را بیابید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

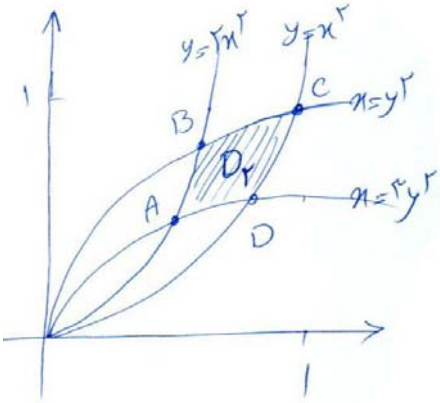


جواب سوال۱- باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم. ناحیه انتگرالگیری D_1 در شکل نشان داده شده است.

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{x^3e^y}{4-y}dydx=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{x^3e^y}{9-y}dxdy=\int_0^4\frac{e^y}{9-y}\int_0^{\sqrt{4-y}}x^3dxdy$$

$$=\int_0^4\frac{e^y}{9-y}(4-y)^2dy=\int_0^4(4-y)e^ydy=(5-y)e^y\,|_0^4=e^4-5$$

جواب سوال۲- مساحت ناحیه D_2 برابر است با $S=\iint_{D_2}dxdy$ با تغییر متغیرهای $v=\frac{y}{x^2}$ و $u=\frac{x}{y^2}$ داریم :



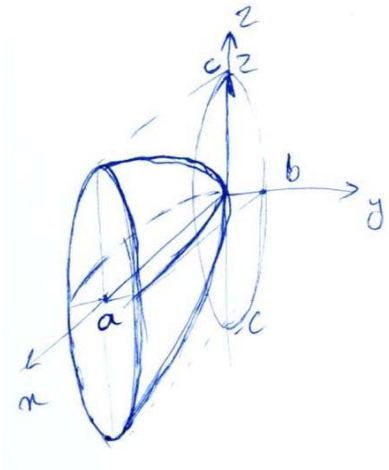
$$dudv=\begin{vmatrix}-2x^{-3}y & x^{-2}\\ y^{-2} & -2xy^{-3}\end{vmatrix}dxdy=\frac{3}{x^2y^2}dxdy$$

$$=3u^2v^2dxdy\qquad\rightarrow\quad dxdy=\frac{1}{3u^2v^2}dudv$$

اکنون داریم :

$$S=\iint_{D_2}dxdy=\iint_{D_2}\frac{1}{3u^2v^2}dudv=\int_1^2\int_1^3\frac{1}{3u^2v^2}dudv$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_1^2\frac{1}{v^2}dv\right)\left(\int_1^3\frac{1}{u^2}du\right)=\frac{1}{3}\left([-\frac{1}{v}]|_1^2\right)\left([-\frac{1}{u}]|_1^3\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$$



جواب سوال۳- مساله ، حجم قسمتی از درون سهمیگون را خواسته است که در آن $0\le x\le a$.

این ناحیه را R می‌نامیم. تصویر این ناحیه روی صفحه $x=0$ بیضی $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است.

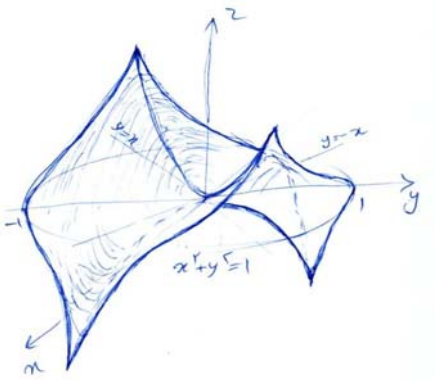
با تغییر متغیر $y=br\cos\theta\ ,\ z=cr\sin\theta$ خواهیم داشت $dydz=bcrdrd\theta$

و معادله سهمیگون به صورت $x=ar^2$ در می آید.

اکنون می‌توانیم حجم را محاسبه کنیم.

$$V=\iiint_R dxdydz=\iiint_R bcrdxdrd\theta=\int_{r=0}^1\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{x=ar^2}^a bcrdxd\theta dr$$

$$=abc\int_{r=0}^1\int_{\theta=0}^{2\pi}r(1-r^2)d\theta dr=2\pi abc\int_{r=0}^1r(1-r^2)dr=2\pi abc[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}]_0^1=\frac{\pi abc}{2}$$



جواب سوال۴- تصویر ناحیه S_1 ، یعنی قسمتی از رویه $z=xy$ (زین اسب)

که درون استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد بر روی صفحه $z=0$ دایره $x^2+y^2=1$ است.

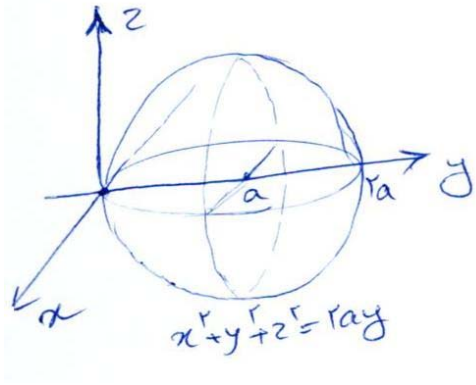
انتگرال روی سطح را به انتگرال دوگانه در صفحه xy تبدیل می‌کنیم.

بردار قائم بر سطح رویه $z=xy$ در نقطه (x,y,z) عبارت است از $(y,x,-1)$ و بردار یکه

آن برابر است با $\vec{n}=\frac{(y,x,-1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ و در نتیجه $dS=\sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$

اکنون می‌توانیم مساحت خواسته شده را محاسبه کنیم.

$$\iint_{S_1}dS=\iint_{S_1}\sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy=\int_{r=0}^1\int_{\theta=0}^{2\pi}r\sqrt{r^2+1}\,d\theta dr=2\pi\int_{r=0}^1r\sqrt{r^2+1}\,dr=\frac{2\pi}{3}(\sqrt{r^2+1})^3\,|_0^1=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$



جواب سوال۵- برای حل انتگرال از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

معادله کره $x^2+y^2+z^2=2ay$ به صورت $\rho=2a\sin\varphi\sin\theta$

در می‌آید که در آن $0\le\varphi,\theta\le\pi$ اکنون داریم :

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iiint_V \frac{\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\rho\sin\varphi}$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2a\sin\varphi\sin\theta}\rho\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}2a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$$=2a^2\Big(\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta\Big)\Big(\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\Big)=2a^2\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=2\pi^2a^2$$

جواب سوال۶- حل مستقیم این انتگرال ساده نیست (اگر بشود آن را حل کرد.) بنابر این از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

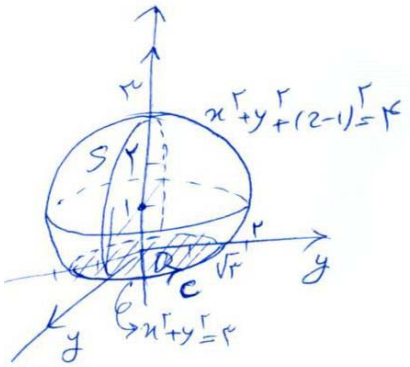
ناحیه درون منحنی C را D می نامیم طبق قضیه گرین داریم :

$$I=\int_C \frac{x^2y}{x^2+1}dx-(\tan^{-1}x)dy=\iint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}(-\tan^{-1}x)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^2y}{x^2+1}\Big)\Big]dxdy=\iint_D(-1)dxdy=-\iint_D dxdy$$

آخرین انتگرال مساحت ناحیه D است بنابر این $I=-\iint_D dxdy=-\pi\times2\times5=-10\pi$

البته به کمک تغییر متغیر $x=5r\cos t\ ,\ y=2r\sin t$ می توان انتگرال آخر را حل کرد.

$$I=-\iint_D dxdy=-\iint_D 10\cdot r\, drdt=-10\int_{r=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}rdtdr=-20\pi\int_{r=0}^{1}rdr=-20\pi\times\frac{1}{2}=-10\pi$$



جواب سوال۷- با توجه به تابع برداری F به نظر می‌آید که حل مستقیم انتگرال روی سطح کار ساده ای نیست. بنابر این برای حل این انتگرال از قضیه های استوکس و دیورژانس استفاده می‌کنیم.

روش اول (قضیه استوکس) : مرز سطح S یعنی دایره $x^2+y^2=3,\ z=0$ را C می‌نامیم.

طبق قضیه استوکس $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ و چون روی C داریم $z=0$ و $dz=0$

بنابر این

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C(-ydx+xdy)$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}[(-\sqrt{3}\sin\theta)(-\sqrt{3}\sin\theta)+(\sqrt{3}\cos\theta)(\sqrt{3}\cos\theta)]d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}3d\theta=6\pi$$

انتگرال $\int_C(-ydx+xdy)$ را می توان به کمک قضیه گرین نیز حل کرد. ناحیه داخل منحنی C را D می نامیم .

$$\int_C(-ydx+xdy)=\iint_D 2dxdy=2\int_{r=0}^{\sqrt{3}}\int_{\theta=0}^{2\pi}rd\theta dr=4\pi\int_{r=0}^{\sqrt{3}}rdr=4\pi\times\frac{3}{2}=6\pi$$

روش دوم (قضیه دیورژانس) : اگر سطح رو به پایین ناحیه D را S' بنامیم آنگاه $S\bigcup S'$ یک سطح بسته است و ناحیه درون آن را V می‌نامیم. طبق دیورژانس داریم :

$$\iint_{S\bigcup S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V div(curlF)dV=\iiint_V 0\cdot dV=0$$

پس:

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{S'}(-2)dxdy=2\iint_{S'}dxdy=6\pi$$